XII Topologie 3

XII.A Questions de cours :

1) Théorème des valeurs intermédiaires
2) L'image continue d'un compact est compact
3) Théorème des valeurs intermédiaires

XII.B Exercices :

Exercice 1: ** Une première étape pour la simplicité de $SO(3)$.**

1. Montrer que tout élément de $SO(3)$ est $O(3)$-semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2. En déduire que (le groupe) $SO(3)$ est connexe par arcs.
3. Soit $h \in H$ un élément non trivial. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} SO(3) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}([g,h]) \end{array}$$

Montrer que $\varphi(SO(3)) = [a, 3]$ pour un certain a que l'on ne déterminera ps

Exercice 2: ** groupes orthogonal / spécial orthogonal**

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact mais n'est pas connexe par arcs.
2. Montrer que $S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe par arcs. En déduire que $S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est la composante connexe par arcs de l'identité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3: **

Soit E un evn.

1. La somme de deux fermés de E est-elle nécessairement fermée ?
2. Montrer que la somme d'un compact et d'un fermé est fermée
3. Montrer que la somme de deux compactes est compacte.

Exercice 4: ***

Soit E un espace vectoriel normé. Soit F et G deux fermés non vides disjoints de E. Montrer qu'il existe une application continue f de E dans $\mathbb{R}$ telle que $f_F = 0$ et $f_G = 1$.
Cette propriété est-elle vraie pour deux ouverts non vides disjoints ?

Exercice 5: **

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On le muni de la norme infinie.
On considère l'endomorphisme :

$$T\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & \left(Tf : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)\end{array}\right.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme continue de E.
2. Est-il injectif ? surjectif ?

Exercice 6: **

En considérant l'application $l : H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tHA + {}^tAH$ pour une matrice $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ fixée, montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est compact.

Exercice 7: ****

Soit r, n dans $\mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_r$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ formant une famille libre. Quel est le nombre de composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^r \ker f_i$? Même question en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Exercice 8: *****

Soit f une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ telle que, pour toute partie A compacte (resp. connexe par arcs), $f(A)$ est compact (resp. connexe par arcs). Montrer que f est continue.